PRIZME

Najpre da kažemo nešto o obeležavanjima i o tekstu zadataka:

- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice
- sa **H** obeležavamo dužinu visine prizme
- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)
- sa **M** obeležavamo površinu omotača
- omotač se sastoji od **bočnih strana** , naravno trostrana prizma u omotaču ima 3 takve strane, četvorostrana 4 itd.
- sa **D** obeležavamo dužinu dijagonale prizme
- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** prizma, to nam govori da su osnovna ivica i visina jednake , to jest :

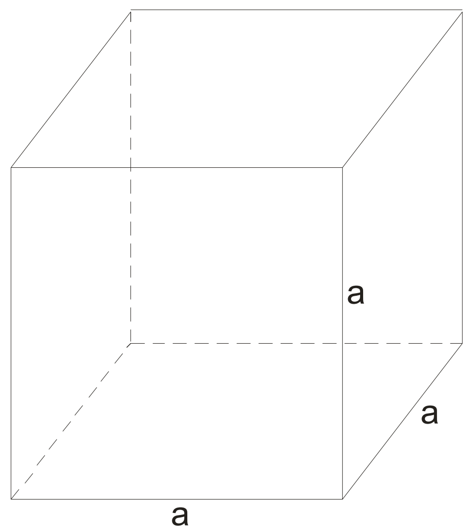
  a = H
- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina prizme normalna na ravan osnove ili ti ,

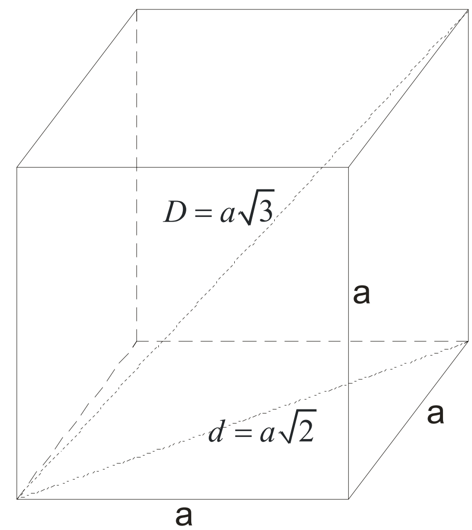
  jednostavnije rečeno , prizma nije kriva
- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi (bazi) pravilan mnogougao:

  jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

Dve najpoznatije prizme su kocka i kvadar, pa vam predlažemo da najpre njih proučite:

KOCKA





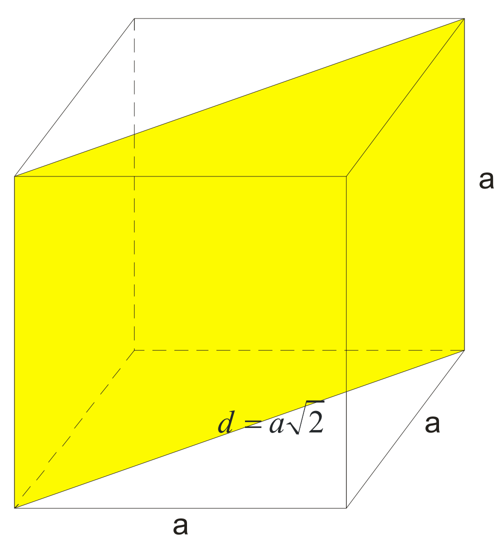
$$P = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Kocka ima 12 ivica dužine a .

Mala dijagonala (dijagonala osnove) je $d = a\sqrt{2}$.

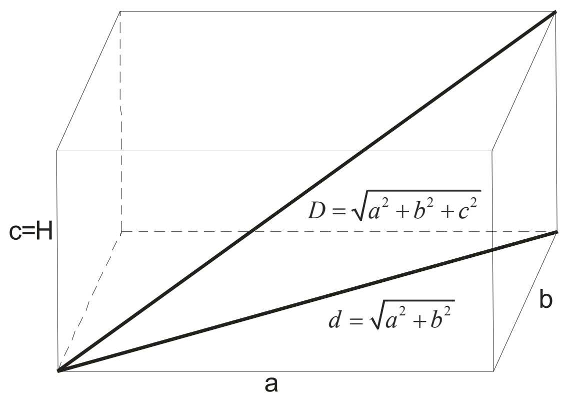
Velika (telesna) dijagonala je $D = a\sqrt{3}$

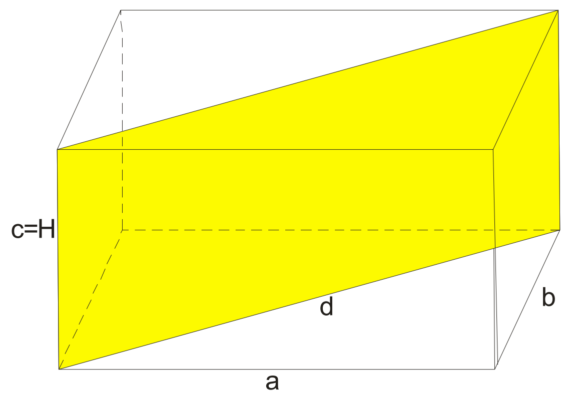


dijagonalni presek

Površina dijagonalnog preseka se računa po formuli: $P_{DP} = a^2\sqrt{2}$

KVADAR





dijagonalni presek

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Mala dijagonala (dijagonala osnove) se računa $d^2 = a^2 + b^2$ to jest $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Velika dijagonala se računa $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ to jest $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dijagonalni presek je pravougaonik površine $P_{DP} = d \cdot c$

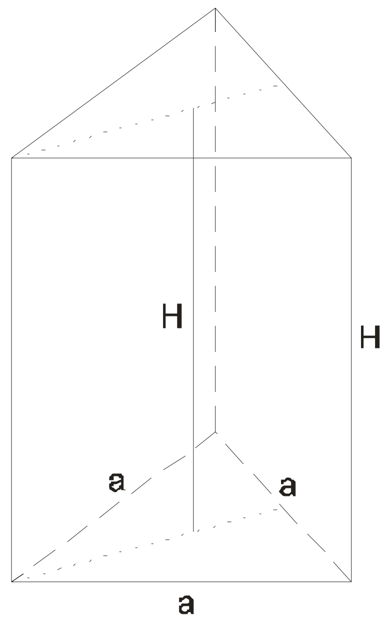
Površina svake prizme se izražava formulom:

$$P = 2B + M$$

Zapremina svake prizme se izračunava formulom:

$$V = B \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA



$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ je površina osnove(baze)

$M = 3aH$ je površina omotača

$$P = 2B + M$$

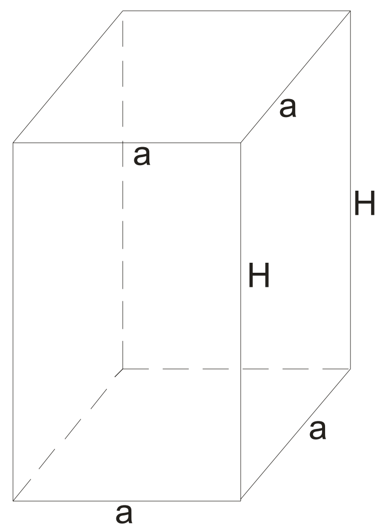
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

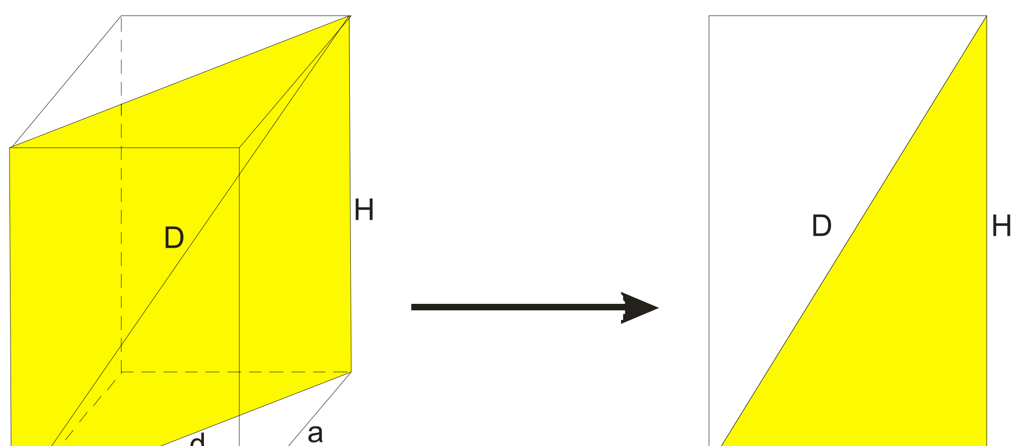
<u>***PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA***</u>



$B = a^2$ $\qquad$ $\mathrm{M} = 4aH$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2a^2 + 4aH \qquad V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek

$d = a\sqrt{2}$

dijagonalni presek

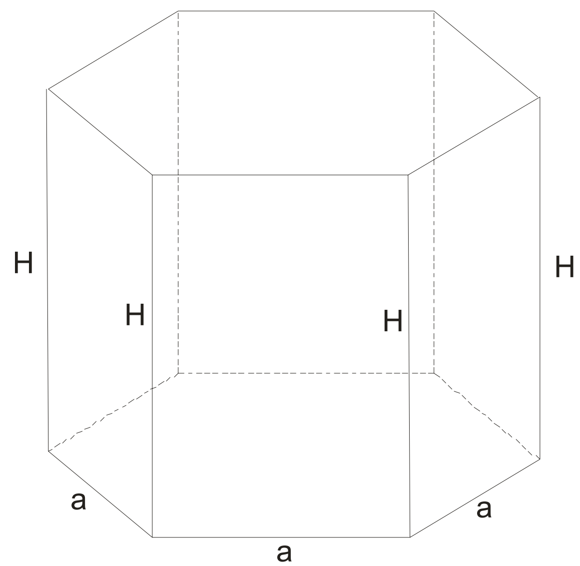
$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$

Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA

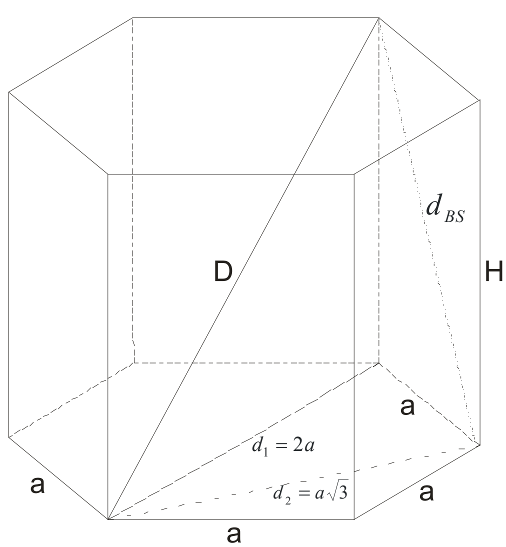


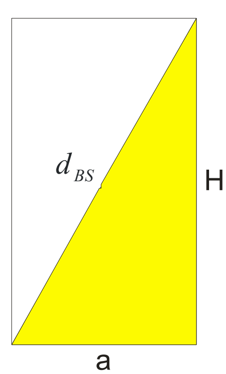
$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6aH$$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH \qquad V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

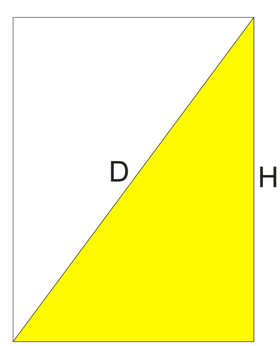
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH \qquad V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$$





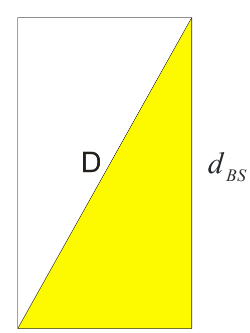
Bočna strana

$d_{BS}{}^2 = H^2 + a^2$



$d_1 = 2a$

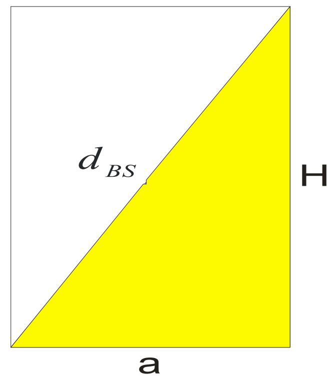
Veći dijagonalni presek



$d_2 = a\sqrt{3}$

Manji dijagonalni presek

Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :



Bočna strana

$$d_{BS}^{\ 2} = H^2 + a^2$$

važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

<u>ZADACI</u>

1*)* Ako se ivica kocke produži za 3cm, površina joj se poveća za 198 cm^2 . Izračunati površinu i zapeminu kocke.

Obeležimo ivicu kocke sa a . Njena površina je $P = 6a^2$
Ako se ivica kocke poveća za 3cm, njena ivica će biti (a+3) a površina $P_1 = 6(a+3)^2$
Prema tekstu zadatka će biti:

$$P_1 - P = 198cm^2$$
$$6(a+3)^2 - 6a^2 = 198 \rightarrow \text{ Sve podelimo sa 6}$$
$$(a+3)^2 - a^2 = 33$$
$$\cancel{a^2} + 6a + 9 - \cancel{a^2} = 33$$
$$6a = 33 - 9$$
$$6a = 24$$
$$a = 6cm$$

$$P = 6a^2$$
$$P = 6 \cdot 6^2$$
$$P = 6 \cdot 36$$
$$P = 216cm^2$$

$$V = a^3$$
$$V = 6^3$$
$$V = 216cm^3$$

2) Ivice dve kocke stoje u razmeri 4:3. Kolike su im površine i zapremine ako im se površine razlikuju za 168 cm^2 **?**

Obeležimo sa a stranicu jedne kocke a sa a_1 stranicu druge kocke.

$$a : a_1 = 4 : 3 \Rightarrow a = 4k \quad \text{i} \quad a_1 = 3k$$

$$P - P_1 = 168$$
$$6a^2 - 6a_1^2 = 168 \to \text{ Delimo sve sa 6}$$
$$a^2 - a_1^2 = 28$$
$$(4k)^2 - (3k) = 28$$
$$16k^2 - 9k^2 = 28$$
$$7k^2 = 28$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8cm$$
$$a_1 = 3k = 3 \cdot 2 = 6cm$$

Sada nije teško naći P i V.

$$P = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384cm^2$$
$$V = a^3 = 8^3 = 512cm^3$$
$$P = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216cm^2$$
$$V = a_1^3 = 6^3 = 216cm^3$$

3) Dimenzije kvadra su tri uzastopna cela broja, a dijagonala je $\sqrt{149}cm$ **. Izračunati površinu i zapreminu kvadra.**

Tri uzastopna cela broja možemo obeležiti sa $x-1,\ x,\ x+1$

$$a^2 + b^2 + c^2 = D^2$$
$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = \sqrt{149}^2$$
$$x^2 \cancel{-2x} + 1 + x^2 + x^2 \cancel{+2x} + 1 = 149$$
$$3x^2 = 149 - 1 - 1$$
$$x^2 = \frac{147}{3}$$
$$x^2 = 49$$
$$x = 7cm$$

$$a = x - 1$$
$$b = x$$
$$c = x + 1$$

$$a = x - 1 = 6cm$$
$$b = x = 7cm$$
$$c = x + 1 = 8cm$$

$$P = 2(ab + ac + bc) = 2(6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8) = 2 \cdot 146$$
$$P = 292cm$$

$$V = abc = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336cm^3$$

6) Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane jednakoivične prizme ivice $a = 8cm$

Podatak da je u pitanju jednakoivična prizma nam govori da je osnovna ivica jednaka visini. To jest, omotač se ovde sastoji iz 3 kvadrata stranice a

$$a = 8$$

$$P = 2B + M$$

$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2$$

$$P = 2\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 8^2$$

$$P = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 64\cdot 3$$

$P = \left(32\sqrt{3} + 192\right)cm^2 \rightarrow$ Ovde ne bi bilo loše da se izvuče zajednički ispred zagrade!

$$P = 32\left(\sqrt{3} + 6\right)cm^2$$

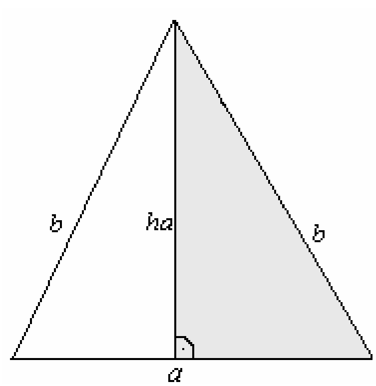
$$V = B\cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{8^3\sqrt{3}}{4} = \frac{512\sqrt{3}}{4}$$

$$V = 128\sqrt{3}cm^3$$

9) Osnova prava prizme je jednakostranični trougao osnovice 10dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme $720dm^3$**, izračunati površinu prizme.**



$a = 10dm$

$h_a = H$

$V = 720dm^3$

$V = B \cdot H$

$V = \frac{a \cdot h_a}{2} \cdot H$

$720 = \frac{10 \cdot H}{2} \cdot H$

$720 = 5H^2$

$H^2 = 144$

$H = 12dm$

$h_a = 12dm$

Primenimo Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao:

$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^{\ 2}$

$b^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 12^2$

$b^2 = 5^2 + 12^2$

$b^2 = 169$

$b = 13dm$

$P = 2B + M$

$P = 2 \cdot \frac{ah_a}{2} + aH + 2bH$

$P = ah_a + H(a + 2b)$

$P = 10 \cdot 12 + 12 \cdot (10 + 26)$

$P = 120 + 432$

$P = 552dm^2$

10) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale $d_1 = 18cm, \quad d_2 = 24cm,$ dok je dijagonala bočne stranice prizme $d = 39cm$. Izračunati površinu prizme.

Najpre primenimo Pitagorinu teoremu na romb.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

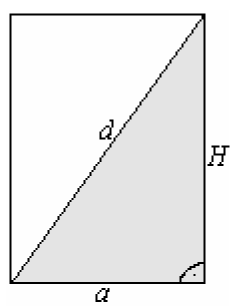
$$a^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 81 + 144$$

$$a^2 = 255$$

$$a = 15cm$$

Pogledajmo jednu bočnu stranu:



$$H^2 = d^2 - a^2$$

$$H^2 = 39^2 - 15^2$$

$$H^2 = 1521 - 225$$

$$H^2 = 1296$$

$$H = 36cm$$

$$P = 2B + M$$

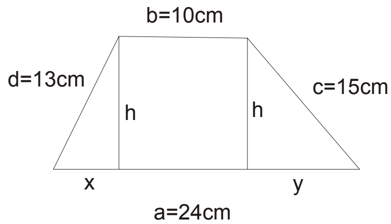
$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{2} + 4aH$$

$$P = 18 \cdot 24 + 4 \cdot 15 \cdot 36$$

$$P = 432 + 2160$$

$$P = 2592cm^2$$

11) Osnova prizme je trapez čije su osnove 24cm i 10cm, a kraci 13cm i 15cm. Izračunati površinu i zapreminu ako je njena visina jednaka visini trapeza.



→ Spustimo visine i obeležimo ‘’deliće’’ sa x i y

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= d^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$169 - x^2 = 225 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 225 - 169$$

$$y^2 - x^2 = 56$$

$$(y - x)(y + x) = 56$$

Kako je $x + y = a - b$

$x + y = 14$ Imamo

$$(y - x) \cdot 14 = 56$$

$$y - x = 4$$

Sada imamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} y + x &= 14 \\ y - x &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 18$$

$$y = 9cm$$

Vratimo se u:

$$h^2 = c^2 - y^2$$

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$

$$h^2 = 225 - 81$$

$$h = 12cm$$

$$H = 12cm$$

$$P = 2B + M$$

$$B = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$B = \frac{24+10}{2} \cdot 12$$

$$B = 17 \cdot 12$$

$$B = 204cm^2$$

PAZI: M se sastaju iz četiri različita pravougaonika:

$$M = H(a + b + c + d)$$

$$M = 12 \cdot (24 + 10 + 13 + 15)$$

$$M = 12 \cdot 62$$

$$M = 744cm^2$$

$$P = 2 \cdot 204 + 744$$

$$P = 1152cm^2$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = 204 \cdot 12$$

$$V = 2448cm^3$$