

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Pod sistemom od dve linearne jednačine sa dve nepoznate x i y podrazumevamo:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ovo je takozvani "prost" sistem do koga uvek možemo doći ekvivalentnim transformacijama (opisane u jednačinama)

Ovde su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ dati realni brojevi (ponekad i parametri). Rešenje sistema je uređeni par brojeva (x_0, y_0) za koji važi da je:

$$a_1x_0 + b_1y_0 =$$

$$c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 =$$

$$c_2$$

Sisteme možemo rešiti pomoću više metoda: zamena, suprotni koeficijenti, grafičkom metodom.

Nama je najvažnije da tačno rešimo dati zadatak (problem) pa ćemo probati da vas to naučimo.

Napomenimo samo da dati sistem može imati: jedinstveno rešenje, beskonačno mnogo rešenja (**neodređen**) ili pak da nema rešenja (**nemoguć**).

Primer 1:

$$2x + 3y = 7$$

Reši sistem: $3x - 6y = 7$

$2x + 3y = 7 \cdot 2$ Najlakše je da ispred x (ili y) napravimo da budu isti brojevi a suprotnog znaka, pa onda te dve jednačine saberemo. Zato ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 2.

$3x - 6y = 7$

$+ \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 3x - 6y = 7 \end{cases}$

$7x = 21$

$x = \frac{21}{7}$

$x = 3$

Kad nadjemo jedno rešenje, vratimo se u jednu od jednačina (bilo koju) da nadjemo drugo rešenje.

$$2x + 3y = 7$$

$$2 \cdot 3 + 3y = 7$$

$$6 + 3y = 7$$

$$3y = 7 - 6$$

$$3y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

Ovde je rešenje jedinstveno:

$$(x, y) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

Primer 2:

Reši sistem:

$$\begin{array}{l} 5x + y = -1 \quad \dots / (-2) \quad \text{Pomnožimo prvu jednačinu sa } (-2) \\ -10x - 2y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +10x + 2y = -2 \quad \text{Ovde imamo situaciju da su se svi "skratili".} \\ -10x - 2y = 2 \end{array}$$

$$0 = 0$$

To nam govori da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Da bi "opisali" ta rešenja, iz jedne od jednačina izrazimo x (ili y), naravno, šta nam je lakše:

$$5x + y = -1$$

$$y = -1 - 5x$$

Sada su rešenja: $(x, y) = (x, -1 - 5x)$
 $x \in R$

Primer 3: Reši sistem: $2x + 3y = 4$
 $-2x - 3y = 5$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \quad \text{Saberemo ih odmah.} \\ -2x - 3y = 5 \end{array}$$

$$0 = 9$$

U ovoj situaciji kažemo da je sistem **nemoguć**, odnosno **nema rešenja**.

Primer 4: Reši sistem:

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3$$

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3 \dots / \cdot 30$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3 \dots / \cdot 12$$

Odmah uočimo da ovaj sistem nije "prost", pa moramo najpre da "napravimo" da bude.

$$5(5x-1) + 3(3y-1) = 90$$

$$2(11-x) + 3(11+y) = 36$$

$$25x - 5 + 9y - 3 = 90$$

$$22 - 2x + 33 + 3y = 36$$

$$25x + 9y = 90 + 5 + 3$$

$$-2x + 3y = -19 \dots / \cdot (-3)$$

Napravili smo "prost" sistem. Drugu jednačinu

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 9y = 98 \\ 6x - 9y = 57 \end{array} \right\} +$$

pomnožimo sa (-3)

$$31x = 155$$

Vratimo se sad u jednu od jednačina iz prostog sistema.

$$\boxed{x = 5}$$

$$-2x + 3y = -19$$

$$-2 \cdot 5 + 3y = -19$$

$$3y = -19 + 10$$

$$3y = -9$$

$$\boxed{y = -3}$$

dakle $(x, y) = (5, -3)$

Primer 5:

$$\frac{14}{x} + \frac{24}{y} = 10$$

$$\frac{7}{x} - \frac{18}{y} = -5$$

Uočavamo da su ovde nepoznate u imeniocu. U takvoj

situaciji najbolje je uzeti smene: $\frac{1}{x} = a$ i $\frac{1}{y} = b$

$$14 \cdot \frac{1}{x} + 24 \cdot \frac{1}{y} = 10$$

$$7 \cdot \frac{1}{x} - 18 \cdot \frac{1}{y} = -5$$

$$14a + 24b = 10$$

$$7a - 18b = -5 \quad \dots / (-2)$$

ovo je prost sistem "po a i b" Pomnožimo drugu jednačinu sa (-2)

$$\left. \begin{array}{l} 14a + 24b = 10 \\ -14a + 36b = 10 \end{array} \right\} +$$

$$60b = 20$$

$$b = \frac{20}{60}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{3}}$$

$$7a - 18b = -5$$

$$7a - 18 \cdot \frac{1}{3} = -5$$

$$7a - 6 = -5$$

$$7a = -5 + 6$$

$$7a = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{7}}$$

Vratimo se u smene da nadjemo x i y.

$$\frac{1}{x} = a, \quad \frac{1}{y} = b$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$x = 7 \quad y = 3$$

$$\boxed{(x, y) = (7, 3)}$$

Sistemi jednačina imaju široku primenu na rešavanje različitih problema.

Naravno, potrebno je dobro proučiti problem, naći vezu između nepoznatih i formirati sistem jednačina. Samo rešavanje sistema posle nije veliki problem.

9) Dva broja imaju osobinu da je zbir četvorostukog prvog broja i za 4 uvećanog drugog broja jednak 50, a razlika trostrukog prvog broja i polovine drugog broja jednaka je 22. Odrediti te brojeve.

Neka je x i y traženi brojevi.

$$4x + (y + 4) = 50$$

Postavimo jednačine:

$$3x - \frac{y}{2} = 22$$

$$4x + (y + 4) = 50$$

$$3x - \frac{y}{2} = 22 \cdot 2$$

$$4x + y = 50 - 4$$

$$6x - y = 44$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 46 \\ 6x - y = 44 \end{array} \right\} +$$

$$10x = 90$$

$$\boxed{x = 9}$$

$$4x + y = 46$$

$$36 + y = 46$$

$$\boxed{y = 10}$$

11) Zbir godina majke i ćerke je 46. Posle 10 godina majka ce biti 2 puta starija od ćerke. Koliko godina sada ima majka a koliko ćerka?

Obeležimo sa:
 x – godine majke
 y – godine ćerke

Posle 10 godina:
majka $\rightarrow x+10$ godina
ćerka $\rightarrow y+10$ godina

$$\begin{array}{l} \rightarrow x + y = 46 \\ x + 10 = 2 \cdot (y + 10) \\ \hline x + y = 46 \\ x + 10 = 2y + 20 \\ \hline x + y = 46 \\ x - 2y = 10 / (-1) \\ \hline x + y = 46 \\ -x + 2y = -10 \\ \hline 3y = 36 \\ \rightarrow y = 12 \\ x + 12 = 46 \\ \hline x = 34 \end{array}$$

Dakle, majka sada ima 34 godine a ćerka 12 godina.