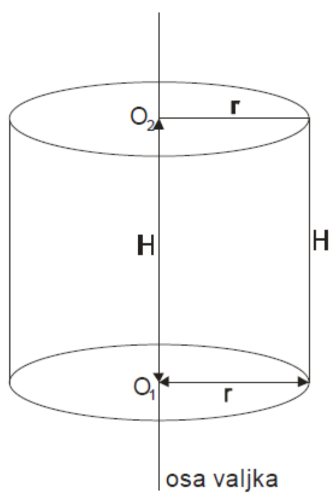
Valjak

Površina i zapremina

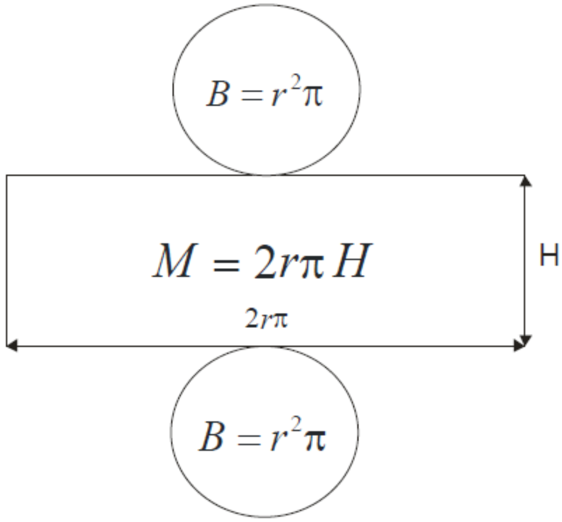
Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi čije su
izvodnice normalne na ravan tih krugova.
Osa valjka je prava koja prolazi kroz centre baza.
Naravno kao i do sada oznake su:
- P je površina valjka
- V je zapremina valjka
- B je površina baze
- M je površina omotača
- H je visina valjka
- r je poluprečnik osnove (baze), onda je 2r prečnik

Početne formule za površinu i zapreminu valjka iste su kao i formule za P i V prizme:

$$P = 2B + M \text{ i } V = B * H$$



Pre nego li sklopimo formule za P i V pogledajmo mrežu valjka:



Baze su očigledno krugovi čija je površina :

$$B = r^2\pi\ .$$

Omotač je pravougaonik čije su stranice visina H i obim kruga $O = 2r\pi$, pa je površina omotača jednaka

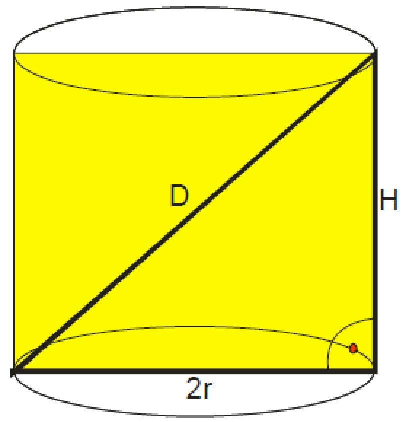
$$M = 2r\pi H$$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H \qquad V = r^2\pi H$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

Pogledajmo sada kako izgleda osni presek valjka:

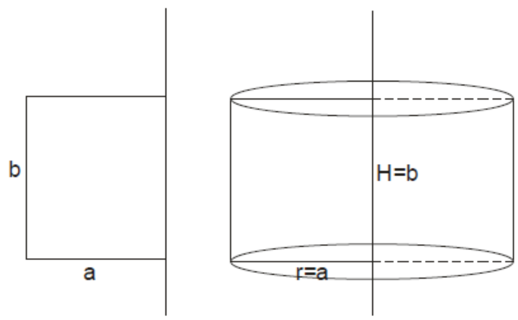


osni presek

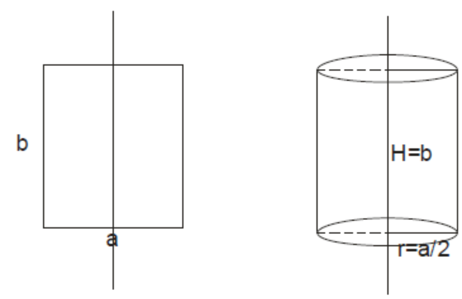
Ovde primenjujemo Pitagorinu teoremu: $D^2 = (2r)^2 + H^2$

Površina osnog preseka je $P_{op} = 2rH$

Ako u tekstu zadatka kaže da je valjak **RAVNOSTRAN**, to znači da mu je osni presek kvadrat i da je $H = 2r$.
Napomenimo još da valjak može nastati obrtanjem kvadrata ili pravougaonika oko jedne stranice ili simetrale stranice.



osa rotacije(stranica)



osa rotacije (simetrala stranice)

Zadaci:

1) Izračunati zapreminu pravog valjka ako je data površina $P = 324\pi cm^2$ **i odnos visine prema poluprečniku** $H : r = 7 : 2$ **.**

$P = 324\pi cm^3$

$\underline{H : r = 7 : 2}$

$V = ?$

Kako imamo datu razmeru, upotrebićemo "trik sa k" $H : r = 7 : 2 \Rightarrow \begin{cases} H = 7k \\ r = 2k \end{cases}$

Obrazac za površinu je:

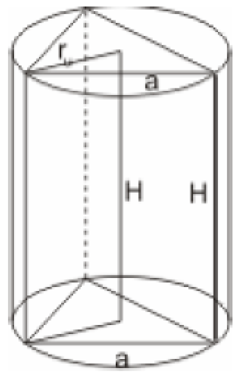
$$P = 2r\pi(r + H)$$
$$324\cancel{\pi} = 2 \cdot 2k \cdot \cancel{\pi}(2k + 7k)$$
$$324 = 4k \cdot 9k$$
$$324 = 36k^2$$
$$k^2 = 9$$
$$k = 3$$

$$H = 7 \cdot 3 = 21cm$$
$$r = 2 \cdot 3 = 6cm$$
$$V = r^2\pi H$$
$$V = 6^2 \cdot \pi \cdot 21$$
$$V = 756\pi cm^3$$

3) Od drvenog valjka poluprečnika osnove $r = 9cm$ **, visine** $H = 12cm$ **istesana je najveća moguća pravilna trostrana prizma. Kolika je zapremina odpadaka?**

Rešenje:

→ Najveća prizma je ona koja je upisana u valjak
→ Visine prizme i valjka su jednake
→ Zapreminu odpadaka ćemo dobiti kad od zapremine valjka oduzmemo zapreminu prizme!



$r = 9cm$

$H = 12cm$

$V_{OD} = V_v - V_P$

Nadjimo najpre stranicu prizme.

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = r_o$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 9$$
$$a\sqrt{3} = 27$$
$$a = \frac{27}{\sqrt{3}}$$
$$a = \frac{27}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$a = \frac{27\sqrt{3}}{3}$$
$$a = 9\sqrt{3}cm$$

$$V_{OD} = V_v - V_P$$
$$V_{OD} = r^2\pi H - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$
$$V_{OD} = H\left(r^2\pi - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$V_{OD} = 12\left(9^2\pi - \frac{\left(9\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$V_{OD} = 12\left(81\pi - \frac{243\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$V_{OD} = \cancel{12}\left(\frac{324\pi - 243\sqrt{3}}{\cancel{4}}\right)$$
$$V_{OD} = 3 \cdot 81\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$
$$V_{OD} = 243\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)cm^3$$

4) Izračunati površinu šupljeg valjka čija je visina $H = 25cm$**, poluprečnik spoljašnjeg omotača** $R = 15cm$**, a unutrašnjeg je** $r = 6cm$

Rešenje:

$H = 25cm$
$R = 15cm$
$r = 6cm$
$P = ?$

Razmišljamo:

→ Površina šupljeg valjka se sastoji iz omotača većeg valjka, omotača manjeg valjka i dve baze koje čine kružni prsteni.

Dakle: $P = M_1 + M_2 + 2B$

$M_1 \rightarrow$ Omotač većeg valjka
$M_1 = 2R\pi H = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 25 = 750\pi cm^2$

$M_2 \rightarrow$ Omotač manjeg valjka
$M_2 = 2r\pi H = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 25 = 300\pi cm^2$

$B = \left(R^2 - r^2\right)\pi = \left(15^2 - 6^2\right)\pi = 189\pi cm^2$
$P = 750\pi + 300\pi + 2 \cdot 189\pi$
$\boxed{P = 1428\pi cm^2}$